УДК 519.2

О ФОРМАЛИЗАЦИИ ПОНЯТИЯ ДИВЕРСИФИКАЦИИ

Целищев М.А., Назаров Л.В.
Лаборатория статистического анализа,
кафедра математической статистики факультета ВМиК МГУ, г. Москва

Поступила в редакцию 21.12.2012, после переработки 20.01.2013.

В работе предложено формальное определение понятия диверсификации как бинарного отношения предпочтения на множестве инвестиционных портфелей. Рассмотрены предпосылки к этому определению, а также некоторые его свойства. В частности, показано, что это бинарное отношение является псевдочастичной упорядоченностью на множестве случайных величин с конечными первыми абсолютными моментами.

In the paper a new approach to diversification as a binary relation on a set of investment portfolios is proposed. We consider prerequisites for such a definition as well as some useful properties. Particularly we prove that proposed binary relation is a quasi-partial order on the set of random variables with finite first absolute moments.

Ключевые слова: диверсификация, выпуклые меры риска, сравнение инвестиционных портфелей.
Keywords: diversification, convex risk measures, investment portfolio comparison.

Введение

Современное понимание термина «диверсификация» восходит к монографии Г. Марковица [2]. В указанной работе уделяется внимание обоснованию двух тезисов:

1. Инвестору следует вкладывать средства (деньги, ресурсы, etc) в отрицательно коррелированные активы;

2. Инвестору следует, по возможности, вкладывать средства в большое число слабокоррелированных активов.

Как бы то ни было, до недавнего времени не было математически строгого определения понятия диверсификации. В работе [1] было предложено и изучено одно из возможных таких определений. Несмотря на достаточно интересные результаты, его недостатком является, во-первых, определение инвестиционного портфеля как случайной величины на жёстко фиксированном вероятностном пространстве $([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$. Во-вторых, для доказательств некоторых утверждений требовалось использовать достаточно сложные объекты — эндоморфизмы вероятностных пространств.

В настоящей работе определение диверсификации претерпело некоторые изменения, хотя, безусловно, основные идеи остались неизменными. Диверсификация рассматривается как бинарное отношение предпочтения на множестве инвестиционных портфелей.

В первой части работы указываются предпосылки выбранного определения. Рассматривается конечное число независимых одинаково распределённых активов и инвестор, у которого есть возможность распределить свой капитал между этими активами. Исследуются разные подходы для сравнения двух таких портфелей: принцип уменьшения дисперсии, принцип увеличения энтропии и мажорирование весовых векторов. Доказываются два важных критерия мажорирования весовых векторов – через ε-преобразования (т. 1.4) и через выпуклую линейную комбинацию эквивалентных портфелей (т. 1.11). Последний и является основной предпосылкой к предложенному во второй части определению.

1. Случай конечного числа независимых одинаково распределённых активов

Пусть $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 2$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, характеризующие возврат средств в момент T от вложения всего капитала инвестора в нулевой момент времени в разные активы с номерами $1, \ldots, n$ соответственно. Будем считать, что $\mathsf{E}X_i = a$, $0 < \mathsf{D}X_i = \sigma^2 < \infty$.

Пусть инвестор имеет возможность собрать портфель, являющийся выпуклой линейной комбинацией величин $X_1, \ldots, X_n$:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \ , \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Lambda_n \ , \tag{1}$$

где

$$\Lambda_n = \Big\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \lambda_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n}, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Big\}. \tag{2}$$

Случайная величина ξ отвечает портфелю, в котором в актив с номером $i = 1, \ldots, n$ вкладывается доля α_i всего капитала инвестора.

Пусть $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i X_i$ — другой такой портфель, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \Lambda_n$. У инвестора может возникнуть вопрос: какой из представленных двух портфелей ξ и η лучше и почему? Следует сразу отметить, что математические ожидания всех портфелей вида (1) совпадают и равны a.

Заметим, что поскольку портфель (1) полностью определяется вектором весов $\alpha \in \Lambda_n$, то вопрос о сравнении портфелей вида (1) равносилен вопросу о сравнении элементов множества Λ_n.

Приведём примеры некоторых способов сравнения портфелей вида (1).

1.1 Уменьшение дисперсии

Пусть, как и ранее,

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i \ , \quad \eta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i X_i \ , \quad \alpha, \beta \in \Lambda_n. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что, в силу независимости и одинаковой распределённости величин $X_1, \ldots, X_n$, дисперсии портфелей ξ и η выражаются через коэффициенты весов:

$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}\left(\alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathsf{D} X_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right) \sigma^2 \ , \tag{4}$$

$$\mathsf{D}\eta = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) \sigma^2. \tag{5}$$

Согласно принципу уменьшения дисперсии, портфель ξ лучше, чем портфель η, если $\mathsf{D}\xi < \mathsf{D}\eta$ (или, что равносильно, $\|\alpha\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 < \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 = \|\beta\|^2$). Такой подход сравнения портфелей близок к исследованиям Г. Марковица [2].

Самым «плохим» в смысле дисперсии портфелем вида (1) будет портфель с весами $\alpha = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где единица находится в произвольной позиции. Действительно, если $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — другой набор весов из Λ_n, и $\exists\, k \neq t$, т.ч. $\beta_k > 0$, $\beta_t > 0$, то

$$\|\beta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 < \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 = \|\alpha\|^2 \ . \tag{6}$$

Самым «хорошим» в смысле дисперсии портфелем вида (1) будет портфель с весами $\alpha = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. Покажем это, пользуясь методом неопределённх множителей Лагранжа:

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1\right) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ . \tag{7}$$

Из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = 2\alpha_i + \lambda = 0 \ , \quad i = \overline{1, n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_n = 1 \end{cases} \tag{8}$$

находим $\lambda_0 = -\frac{2}{n}$ и точку, подозрительную на условный экстремум: $\alpha^0 = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. Далее,

$$d^2\Phi = 2\sum_{i=1}^{n} (d\alpha_i)^2 > 0 \quad \text{везде}. \tag{9}$$

Поэтому α^0 является точкой условного минимума функции $\|\alpha\|^2$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

1.2 Увеличение энтропии

Если в (1) вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Lambda_n$ рассматривать как распределение вероятностей некоторой простой случайной величины (скажем, принимающей значения $1, \ldots, n$), то энтропия этого распределения равна

$$H = H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln \alpha_i \ . \tag{10}$$

При этом считается, что $0 \cdot \ln 0 = 0$.

Принцип увеличения энтропии состоит в том, что чем больше энтропия весов в портфеле (1), тем этот портфель лучше. Такой способ сравнения портфелей имеет общие черты с принципом уменьшения дисперсии. В частности, точно так же показывается, что самым «плохим» в смысле энтропии (т. е. портфелем вида (1) с минимальной энтропией весов) снова является портфель с весами вида $\alpha = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Действительно, если $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — другой набор весов из Λ_n, и $\exists\ k \neq t$, т.ч. $\beta_k > 0$, $\beta_t > 0$, то

$$H(\beta) = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i \ln \beta_i > 0 = H(\alpha) \ . \tag{11}$$

Самым «хорошим» в смысле энтропии (т. е. портфелем вида (1) с максимальной энтропией весов) будет, опять же, портфель с весами $\alpha = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. Покажем это, снова пользуясь методом неопределённх множителей Лагранжа:

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln \alpha_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 1 \right) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R} \ . \tag{12}$$

Из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} = -1 - \ln \alpha_i + \lambda = 0 \ , \quad i = \overline{1, n} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_n = 1 \end{cases} \tag{13}$$

находим $\lambda_0 = 1 - \ln n$ и точку, подозрительную на условный экстремум: $\alpha^0 = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. Далее,

$$d^2\Phi(\alpha^0, \lambda_0) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i^0} (d\alpha_i)^2 = -n \sum_{i=1}^{n} (d\alpha_i)^2 < 0. \tag{14}$$

Поэтому α^0 является точкой условного максимума функции $H(\alpha)$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Возникает вопрос об эквивалентности принципов минимизации дисперсии и максимизации энтропии. Несложно показать, что для $n = 2$ оба принципа действительно эквивалентны (поскольку чем ближе α_1 к $\frac{1}{2}$, тем меньше $\|\alpha\|^2$ и тем больше $H(\alpha)$, что проверяется непосредственно). Однако уже для $n = 3$ эквивалетность нарушается.

Пример 1.1. Пусть $\alpha^\star = (0.7, 0.2, 0.1)$, $\beta^\star = (0.6, 0.39, 0.01)$. В этом случае $\|\alpha^\star\|^2 = 0.54 > 0.5122 = \|\beta^\star\|^2$, а $H(\alpha) = 0.8018\ldots > 0.7197\ldots = H(\beta)$. Согласно принципу уменьшения дисперсии, портфель с весами $\beta^\star$ лучше. Согласно же принципу увеличения энтропии, портфель с весами $\alpha^\star$ предпочтительнее.

Замечание. Для $n > 3$ принципы также не являются эквивалентными. Для доказательства этого факта достаточно взять $\alpha^\star = (0.7, 0.2, 0.1, 0, \ldots, 0)$, $\beta^\star = (0.6, 0.39, 0.01, 0, \ldots, 0)$.

1.3 Мажорирование весовых векторов

Если у инвестора нет определённого предпочтения внутри группы активов $X_1, \ldots, X_n$ (а в силу их независимости и одинаковой распределённости предпосылок для таких предпочтений быть не должно), то портфели с весами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{t-1}, \alpha_t, \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_t, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{t-1}, \alpha_k, \alpha_{t+1}, \ldots, \alpha_n)$ в сущности обозначают одинаковые портфели. В связи с этим, вместо множества Λ_n, определённого в (2), можно рассматривать множество упорядоченных весовых векторов

$$\widetilde{\Lambda}_n = \Big\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ 1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Big\} \tag{15}$$

и сравнивать векторы уже из множества $\widetilde{\Lambda}_n$.

Определение 1.2. Вектор весов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \widetilde{\Lambda}_n$ мажорирует вектор весов $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \widetilde{\Lambda}_n$ (обозн. $\alpha \succcurlyeq \beta$), если $\sum\limits_{i=k}^{n} \alpha_i \geqslant \sum\limits_{i=k}^{n} \beta_i$ для всех $k = \overline{1, n}$ (или, что равносильно, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i$ для всех $k = \overline{1, n}$).

Замечание. Из двух весовых векторов множества $\widetilde{\Lambda}_n$ не обязательно один из них мажорирует другой. Достаточно рассмотреть векторы $\alpha^\star$ и $\beta^\star$ из примера 1.1.

Определение 1.3. Пусть $\varepsilon \geqslant 0$. ε-преобразованием вектора весов

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in \widetilde{\Lambda}_n \ ,$$

где $1 \leqslant m < r \leqslant n$, называется вектор весов

$$\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_m - \varepsilon, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r + \varepsilon, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) \in \widetilde{\Lambda}_n \ .$$

Поскольку мы требуем, чтобы $\alpha' \in \widetilde{\Lambda}_n$, то значение ε ограничено сверху:

$$0 \leqslant \varepsilon \leqslant \min\big(\ \alpha_m - \alpha_{m+1}\ ,\ \alpha_{r-1} - \alpha_r\ ,\ (\alpha_m - \alpha_r)/2\ \big)\,. \tag{16}$$

(Третий аргумент функции min соответствует случаю $r = m + 1$.)
То обстоятельство, что α' является ε-преобразованием α, будем записывать $\alpha \xrightarrow{\varepsilon, m, r} \alpha'$ (или, для краткости, $\alpha \to \alpha'$).

Фактически отношение $\alpha \xrightarrow{\varepsilon,m,r} \alpha'$ означает, что портфель с весами α' является следующей корректировкой портфеля с весами α: доля капитала ε переносится из актива с номером m в актив с номером r, при условии, что, как до, так и после этой операции, в актив с номером m была вложена не меньшая доля всего капитала, чем в актив с номером r.

Теорема 1.4. *Пусть $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$. Тогда α мажорирует β в том и только в том случае, когда существует конечное число ε-преобразований, переводящих β в α, т. е.*

$$\alpha \succcurlyeq \beta \quad \Longleftrightarrow$$
$$\exists \gamma_1, \ldots, \gamma_{d-1} \in \widetilde{\Lambda}_n: \ \beta \xrightarrow{\varepsilon_1, m_1, r_1} \gamma_1 \xrightarrow{\varepsilon_2, m_2, r_2} \ldots \xrightarrow{\varepsilon_{d-1}, m_{d-1}, r_{d-1}} \gamma_{d-1} \xrightarrow{\varepsilon_d, m_d, r_d} \alpha. \tag{17}$$

Доказательство. Достаточность. В силу транзитивности отношения $\succcurlyeq$ на $\widetilde{\Lambda}_n$ (которое проверяется непосредственно), достаточно доказать, что если $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$, $\beta \xrightarrow{\varepsilon,m,r} \alpha$, то $\alpha \succcurlyeq \beta$. Действительно, $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}, \alpha_m = \beta_m - \varepsilon, \alpha_{m+1} = \beta_{m+1}, \ldots, \alpha_{r-1} = \beta_{r-1}, \alpha_r = \beta_r + \varepsilon, \alpha_{r+1} = \beta_{r+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Имеем:

$$\sum_{i=k}^{n} \alpha_i = \begin{cases} \sum\limits_{i=k}^{n} \beta_i & \text{при } k = \overline{r+1, n}; \\ \varepsilon + \sum\limits_{i=k}^{n} \beta_i \geqslant \sum\limits_{i=k}^{n} \beta_i & \text{при } k = \overline{m+1, r}; \\ \sum\limits_{i=k}^{n} \beta_i & \text{при } k = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Поэтому $\alpha \succcurlyeq \beta$, что и требовалось доказать.
Необходимость. Пусть $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$ и $\alpha \succcurlyeq \beta$. Доказательство проводится за конечное число шагов, на каждом из которых строится очередной элемент цепочки:

$$\beta \xrightarrow{\varepsilon,m,r} \gamma \longrightarrow \ldots \longrightarrow \alpha, \text{ где } \gamma, \ldots \in \widetilde{\Lambda}_n \ . \tag{18}$$

Опишем шаг перехода от β к γ. Пусть

$$L_{\alpha,\beta} = \{i = 1, \ldots, n \mid \alpha_i < \beta_i\} = \{l_1, \ldots, l_q\}, \quad 1 \leqslant l_1 < \ldots < l_q \leqslant n, \quad q \in [0, n-1];$$

$$J_{\alpha,\beta} = \{i = 1, \ldots, n \mid \alpha_i > \beta_i\} = \{j_1, \ldots, j_t\}, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t \leqslant n, \quad t \in [0, n-1].$$

Если $\alpha = \beta$, то в силу рефлексивности ε-преобразования, $\beta \longrightarrow \alpha$, и теорема доказана. Если же $\alpha \neq \beta$, то оба множества $L_{\alpha,\beta}$ и $J_{\alpha,\beta}$ не пусты (т.е. $q \geqslant 1$, $t \geqslant 1$), поскольку α и β являются элементами $\widetilde{\Lambda}_n$.
Покажем, что $l_1 < j_1$. Действительно, если это не так и $l_1 > j_1$, то

$$\sum_{i=1}^{j_1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{j_1-1} \alpha_i + \alpha_{j_1} = \sum_{i=1}^{j_1-1} \beta_i + \alpha_{j_1} > \sum_{i=1}^{j_1-1} \beta_i + \beta_{j_1} = \sum_{i=1}^{j_1} \beta_i \ ,$$

что противоречит определению $\alpha \succcurlyeq \beta$.
В силу последнего доказанного неравенства, множество $\{l \in L_{\alpha,\beta} \mid l < j_1\}$ не пусто (как минимум, оно содержит l_1). Возьмём $m = \max\{l \in L_{\alpha,\beta} \mid l < j_1\}$, $r =$

j_1. Нетрудно видеть, что $m < r$. Заметим, что если $m+1 \neq r$, то $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1}, \ldots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1}$. Для получения γ, понизим β_m и повысим β_r на величину

$$\varepsilon = \min(\beta_m - \alpha_m, \alpha_r - \beta_r) > 0,$$

то есть γ определяется из выражения $\beta \xrightarrow{\varepsilon,m,r} \gamma$. При этом γ остаётся в $\widetilde{\Lambda}_n$, поскольку

$$\gamma_m = \beta_m - \varepsilon \geqslant \beta_m - (\beta_m - \alpha_m) = \alpha_m \geqslant \begin{cases} \alpha_{m+1} = \beta_{m+1} = \gamma_{m+1}\ , \text{ если } m+1 \neq r, \\ \alpha_r > \beta_r = \gamma_r = \gamma_{m+1}\ , \text{ если } m+1 = r; \end{cases}$$

$$\gamma_r = \beta_r + \varepsilon \leqslant \beta_r + (\alpha_r - \beta_r) = \alpha_r \leqslant \begin{cases} \alpha_{r-1} = \beta_{r-1} = \gamma_{r-1}\ , \text{ если } m+1 \neq r, \\ \alpha_m < \beta_m = \gamma_m = \gamma_{r-1}\ , \text{ если } m+1 = r. \end{cases}$$

Покажем, что $\alpha \succcurlyeq \gamma$, а именно что $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma_i$ при $k = 1, \ldots, n$.
Если $k < m$, то в силу $\alpha \succcurlyeq \beta$,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i.$$

Если $k \in [m, r-1]$, то в силу $\alpha \succcurlyeq \beta$ и $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1}, \ldots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i &= \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i + \alpha_m + \sum_{i=m+1}^{k} \alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i + \alpha_m + \sum_{i=m+1}^{k} \beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i + \alpha_m + \sum_{i=m+1}^{k} \gamma_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i + \alpha_m - \gamma_m = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \gamma_i + \alpha_m - \beta_m + \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{k} \gamma_i + \alpha_m - \beta_m + \beta_m - \alpha_m = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i. \end{aligned}$$

Если же $k \in [r, n]$, то снова в силу $\alpha \succcurlyeq \beta$,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m,r}}^{k} \beta_i + \beta_m + \beta_r = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m,r}}^{k} \gamma_i + (\gamma_m + \varepsilon) + (\gamma_r - \varepsilon) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i.$$

Итак, показано, что $\alpha \succcurlyeq \gamma$. Для полного доказательства теоремы остаётся показать, что за конечное число описанных шагов можно добраться от β до α по цепочке (18). Для этого достаточно заметить, что мощность хотя бы одного из множеств L или J на каждом следующем шаге уменьшается. Действительно, обозначив

$$L_{\alpha,\gamma} = \big\{ i = 1, \ldots, n \mid \alpha_i < \gamma_i \big\},$$
$$J_{\alpha,\gamma} = \big\{ i = 1, \ldots, n \mid \alpha_i > \gamma_i \big\},$$

получим, что если $\varepsilon = \beta_m - \alpha_m$, то $L_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\beta} \setminus \{m\}$, а если $\varepsilon = \alpha_r - \beta_r$, то $J_{\alpha,\gamma} = J_{\alpha,\beta} \setminus \{r\}$. На некотором шаге оба множества станут пустыми, что и будет завершением цепочки (18). Таким образом, за менее чем $2n$ шагов будет построена последовательность ε-преобразований, переводящая β в α. Теорема полностью доказана. $\square$

Последняя теорема означает, что если $\alpha \succcurlyeq \beta$, то портфель с весами α можно получить из портфеля с весами β путём конечного числа корректировок, указанных после определения ε-преобразования.

Следующая теорема является ещё одним полезным критерием отношения мажорирования весовых векторов.

Теорема 1.5. *Для любых $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$ следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\alpha \succcurlyeq \beta$;
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f(\beta_i)$ *для любой выпуклой функции* f ;
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} f(\beta_i)$ *для любой вогнутой функции* f.

Доказательство. Эквивалентность второго и третьего утверждений очевидны. Докажем эквивалентность первого и второго.
Пусть $\alpha \succcurlyeq \beta$. Тогда, как следует из теоремы 1.4, α можно получить из β с помощью конечного числа ε-преобразований. Достаточно доказать второе утверждение для одного такого преобразования. Пусть $\beta \xrightarrow{\varepsilon,m,r} \alpha$, а f — произвольная выпуклая функция. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) - \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) = f(\beta_m - \varepsilon) + f(\beta_r + \varepsilon) - f(\beta_m) - f(\beta_r) = \\ = \Big(f(\beta_r + \varepsilon) - f(\beta_r)\Big) - \Big(f(\beta_m) - f(\beta_m - \varepsilon)\Big). \quad (19)$$

Последнее выражение есть разность приращений выпуклой функции в точках β_r и $\beta_m - \varepsilon$, соответсвтвующих одинаковым приращениям аргумента. Эта разность неположительна, поскольку из определения ε-преобразования следует, что $\beta_r \leqslant \beta_m - \varepsilon$.
Пусть теперь справедливо второе утверждение теоремы. Докажем по индукции, что для всех $k = \overline{1,n}$ выполнено $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i$.
На первом шаге предположим, что $\alpha_1 > \beta_1$. Возьмём выпуклую функцию $f(x) = (x - \beta_1)^+$. Для неё $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \geqslant (\alpha_1 - \beta_1) > 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\beta_i)$, что противоречит второму утверждению.
Далее, допустим $\sum\limits_{i=1}^{t} \alpha_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{t} \beta_i$ для всех $t = \overline{1,k}$ и $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \alpha_i > \sum\limits_{i=1}^{k+1} \beta_i$. Это возможно

только при $\alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$. Тогда для выпуклой функции $f(x) = (x - \beta_{k+1})^+$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\beta_i) - f(\alpha_i)] = \sum_{i=1}^{k+1}[(\beta_i - \beta_{k+1}) - (\alpha_i - \beta_{k+1})] - \sum_{i=k+2}^{n}(\alpha_i - \beta_{k+1})^+ \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k+1}\beta_i - \sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i < 0. \quad (20)$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Следствие. *Рассмотренные выше меры диверсификации дисперсия и энтропия имеют вид $\sum f(\alpha_i)$ с функциями $f(x) = x^2$ для дисперсии и $f(x) = -x \ln x$ для энтропии, первая из которых выпукла, а вторая вогнута. Поэтому если $\alpha \succcurlyeq \beta$, то $\|\alpha\| \leqslant \|\beta\|$, $H(\alpha) \geqslant H(\beta)$.*

Итак, принцип мажорирования весовых векторов сохраняет принципы минимизации дисперсии и максимизации энтропии. К сожалению, за это приходится платить невозможностью сравнения некоторых портфелей (например, портфелей $\alpha^\star$ и $\beta^\star$ из примера 1.1).

Как и следовало ожидать, самым «плохим» в смысле отношения $\succcurlyeq$ является вырожденный портфель, а самым «хорошим» — портфель, в котором капитал распределён равномерно между всеми активами:

Теорема 1.6. $(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \succcurlyeq \alpha \succcurlyeq (1, 0, \ldots, 0)$ *для всех* $\alpha \in \widetilde{\Lambda}_n$.

Доказательство. Правое отношение доказывается элементарно из определения мажорирования. Докажем левое отношение. Нужно показать, что $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i \geqslant \frac{k}{n}$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Для $k = 1, \ldots, n$ имеем в силу $\alpha \in \widetilde{\Lambda}_n$:

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)\frac{n}{k} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + \left(\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k}{k}\right) \cdot (n - k) \geqslant$$
$$\geqslant (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + \alpha_k(n - k) \geqslant (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + (\alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1,$$

что и доказывает требуемые неравенства. □

1.4 Продолжение отношения $\succcurlyeq$ с $\widetilde{\Lambda}_n$ на Λ_n

Отношение $\succcurlyeq$ можно естественным образом продолжить с $\widetilde{\Lambda}_n$ (15) на Λ_n (2). Для этого потребуется ввести отображение упорядочивания

$$O\colon \Lambda_n \to \widetilde{\Lambda}_n, \quad (21)$$

ставящее в соответствие каждому элементу $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ упорядоченную по невозрастанию перестановку его компонент:

$$O(\lambda) = (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_n}) \in \widetilde{\Lambda}_n, \quad 1 \geqslant \lambda_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{i_n} \geqslant 0. \quad (22)$$

Замечание. Очевидно, что $O(\alpha) = \alpha$ для любого $\alpha \in \widetilde{\Lambda}_n$.

Определение 1.7. Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. α мажорирует β ($\alpha \succcurlyeq \beta$), если $O(\alpha) \succcurlyeq O(\beta)$.

Аналогично продолжается и ε-преобразование:

Определение 1.8. Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. $\beta \stackrel{\varepsilon}{\to} \alpha$, если $O(\beta) \xrightarrow{\varepsilon,m,r} O(\alpha)$.

Замечание. В записи $\beta \stackrel{\varepsilon}{\to} \alpha$ отсутствуют индексы m и r. Это не случайно, поскольку номера изменяющихся на ε компонент здесь не важны (более того, они могут быть разными у α и β). Важен лишь факт того, что вектор весов α можно получить из вектора весов β только увеличением на ε одной (меньшей) компоненты вектора β, уменьшением на ε другой (большей) компоненты и произвольной перестановкой всех компонент.

Для удобства введём понятие эквивалентности весовых векторов.

Определение 1.9. Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Будем говорить, что α и β эквивалентны ($\alpha \sim \beta$), если $O(\alpha) = O(\beta)$.

Для построенных отношений остаётся справедлива теорема 1.4: $\alpha \succcurlyeq \beta$ тогда и только тогда, когда α можно получить из β конечным числом ε-преобразований.

Лемма 1.10. *Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Тогда*

$$\beta \stackrel{\varepsilon}{\to} \alpha \quad \Longrightarrow \quad \exists \beta', \beta'' \sim \beta \text{ и } q \in [0,1] \colon \alpha = q\beta' + (1-q)\beta''. \tag{23}$$

Доказательство. Считаем, что $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$ (если это не так, то рассматриваем вместо α и β $O(\alpha)$ и $O(\beta)$ соответственно, учитывая, что $\beta \stackrel{\varepsilon}{\to} \alpha \iff O(\beta) \stackrel{\varepsilon}{\to} O(\alpha)$).
Пусть $\beta \xrightarrow{\varepsilon,m,r} \alpha$. Если $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$, то, по определению, $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m - \varepsilon, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r + \varepsilon, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n)$. Обозначим $\beta'' = (\beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_r, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_m, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n) \sim \beta$ и возьмём $q = \frac{\beta_m - \beta_r - \varepsilon}{\beta_m - \beta_r} \in [0,1]$. Несложно видеть, что $\alpha = q\beta + (1-q)\beta''$. Действительно, достаточно проверить только компоненты с номерами m и r (в остальных компонентах β и β'' совпадают):

$$q\beta_m + (1-q)\beta_r = \beta_r + q(\beta_m - \beta_r) = \beta_m - \varepsilon,$$

$$q\beta_r + (1-q)\beta_m = \beta_m - q(\beta_m - \beta_r) = \beta_r + \varepsilon,$$

что и требовалось показать. □

Оказывается, можно построить ещё один критерий отношения мажорирования:

Теорема 1.11. *Пусть $\alpha, \beta \in \Lambda_n$. Тогда*

$$\alpha \succcurlyeq \beta \quad \iff \quad \exists \beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(m)} \sim \beta \text{ и } \exists \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Lambda_m, \text{ т.ч. } \alpha = \sum_{j=1}^{m} \theta_j \beta^{(j)} . \tag{24}$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, можно считать, что $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$.
Достаточность. Пусть $\alpha = \sum_{j=1}^{m} \theta_j \beta^{(j)}$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Lambda_m$ и $\beta^{(j)} \sim \beta$, $j = 1, \ldots, m$. Для произвольного $k \in [1, n]$ имеем в силу $\beta \in \widetilde{\Lambda}_n$ и $\theta \in \Lambda_m$:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \theta_j \beta_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{m} \theta_j \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i^{(j)} \right) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \theta_j \left(\beta_1 + \ldots + \beta_k \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \theta_j \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \quad . \tag{25}$$

По определению, $\alpha \succcurlyeq \beta$. Достаточность доказана.
Необходимость. Пусть $\alpha, \beta \in \widetilde{\Lambda}_n$ и $\alpha \succcurlyeq \beta$. По теореме 1.4, можно построить конечную последовательность ε-преобразований, переводящую β в α:

$$\beta \xrightarrow{\varepsilon_1} \gamma^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon_2} \ldots \xrightarrow{\varepsilon_{t-2}} \gamma^{(t-2)} \xrightarrow{\varepsilon_{t-1}} \gamma^{(t-1)} \xrightarrow{\varepsilon_t} \alpha \quad , \tag{26}$$

где $\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(t-2)}, \gamma^{(t-1)} \in \widetilde{\Lambda}_n$.
Из последнего отношения ($\gamma^{(t-1)} \xrightarrow{\varepsilon_t} \alpha$) и леммы 1.10, существуют $\gamma^{(t-1,1)}, \gamma^{(t-1,2)} \in \Lambda_n$, $\gamma^{(t-1,1)} \sim \gamma^{(t-1,2)} \sim \gamma^{(t-1)}$ и $q_t \in [0, 1]$, так что $\alpha = q_t \gamma^{(t-1,1)} + (1 - q_t)\gamma^{(t-1,2)}$.
Пользуясь теперь предпоследним отношением в цепочке (26), леммой 1.10, и тем фактом, что $\gamma^{(t-1,1)} \sim \gamma^{(t-1,2)} \sim \gamma^{(t-1)}$, можно построить $\gamma^{(t-2,1)}, \gamma^{(t-2,2)}, \gamma^{(t-2,3)}, \gamma^{(t-2,4)} \in \Lambda_n$, $\gamma^{(t-2,1)} \sim \gamma^{(t-2,2)} \sim \gamma^{(t-2,3)} \sim \gamma^{(t-2,4)} \sim \gamma^{(t-2)}$ и $q_{t-1} \in [0, 1]$, так, что

$$\gamma^{(t-1,1)} = q_{t-1}\gamma^{(t-2,1)} + (1 - q_{t-1})\gamma^{(t-2,2)},$$
$$\gamma^{(t-1,2)} = q_{t-1}\gamma^{(t-2,3)} + (1 - q_{t-1})\gamma^{(t-2,4)}.$$

Подставляем эти выражения в полученную для α формулу:

$$\alpha = q_t q_{t-1}\gamma^{(t-2,1)} + q_t(1-q_{t-1})\gamma^{(t-2,2)} + (1-q_t)q_{t-1}\gamma^{(t-2,3)} + (1-q_t)(1-q_{t-1})\gamma^{(t-2,4)}.$$

Снова «раскрывая» все $\gamma^{(t-2,u)}$, $u = 1, 2, 3, 4$, продолжаем этот процесс. В итоге будут построены $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \ldots, \beta^{(2^t)} \in \Lambda_n$, все эквивалентные β, и $q_t, q_{t-1}, \ldots, q_1 \in [0, 1]$, так что

$$\begin{aligned} \alpha = {} & q_t\, q_{t-1}\, \ldots\, q_2\, q_1\, \beta^{(1)} + \\ & + q_t\, q_{t-1}\, \ldots\, q_2\, (1 - q_1)\, \beta^{(2)} + \\ & + \quad \ldots \quad + \\ & + (1 - q_t)\, (1 - q_{t-1})\, \ldots\, (1 - q_2)\, (1 - q_1)\, \beta^{(2^t)}. \end{aligned}$$

Поскольку $q_t\, q_{t-1}\, \ldots\, q_2\, q_1 + q_t\, q_{t-1}\, \ldots\, q_2\, (1 - q_1) + \ldots + (1 - q_t)\, (1 - q_{t-1})\, \ldots\, (1 - q_2)\, (1 - q_1) = 1$, то необходимость, а вместе с ней и вся теорема, доказана. □

Последняя теорема очень важна, она позволяет взглянуть на отношение мажорирования весовых векторов с иной строны: один портфель не хуже второго, если первый можно представить как некоторую выпуклую линейную комбинацию портфелей, эквивалентных второму портфелю. Именно эта идея лежит в основе построения отношения диверсификации, представленного в следующем разделе.

Замечание. Во всей первой части считалось, что $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — это набор независимых одинаково распределённых случайных величин. Однако единственным существенным требованием было то, что у инвестора не должно быть определённых предпочтений внутри этой группы активов. Таким образом, можно ослабить наше первоначальное требование и считать, что X — это набор симметрично зависимых случайных величин, то есть таких, что все $n!$ перестановок компонент вектора X имеют одно и то же многомерное распределение. Примерами таких распределений являются

1. многомерное нормальное распределение с одинаковыми дисперсиями и одинаковыми ковариациями $cov(X_i, X_j)$ при $i \neq j$,
2. $X_i = \sum\limits_{j \neq i} f(\xi_j)$, где $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, а f — измеримая функция.

Единственное, что следует учитывать в этом случае, — это то, что принцип, согласно которому сравниваются $\|\alpha\|$ и $\|\beta\|$, уже нельзя назвать принципом уменьшения дисперсии.

2. Отношение диверсификации

В этом разделе вводится понятие диверсификации как бинарного отношения предпочтения на множестве инвестиционных портфелей. Здесь следует строго определить, что мы будем называть инвестиционным портфелем. Пусть инвестор обладает капиталом S, и есть возможность вложить его в нулевой момент времени в некоторый актив, либо в некоторую группу активов (все активы считаем безгранично делимыми). При этом подразумевается возможность вложения как в безрисковые, так и в рисковые активы (включая и короткую продажу). Под инвестиционным портфелем понимается случайная величина, характеризующая объём денежных средств инвестора при закрытии всех позиций в фиксированный момент времни $T > 0$.

Считаем, что все такие случайные величины определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Под $L = L(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ понимается множество всех случайных величин (точнее, множество всех классов эквивалентности случайных величин) на этом вероятностном пространстве, а под $L^r = L^r(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, $r \geqslant 1$ — множество всех классов эквивалентности с конечными r-ми абсолютными моментами.

Заметим, что выпуклая линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i$ портфелей $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с весами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, n, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, сама является инвестиционным портфелем и соответствует распределению капитала S между портфелями $\xi_1, \ldots, \xi_n$ с соответствующими весами.

2.1 Определение

Определение 2.12. Будем говорить, что инвестиционный портфель ξ является диверсификацией инвестиционного портфеля η (и обозначать это отношение как $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$), если существует многомерное распределение $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, такое что все маргинальные распределения компонент этого вектора совпадают с распределением η, а распределение ξ совпадает с распределением некоторой выпуклой линейной комбинации компонент этого вектора, то есть

$$\eta_i \overset{\mathrm{d}}{=} \eta \quad \forall\, i = 1, \dots, n \tag{27}$$

и

$$\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i \text{ , где } a_i \geqslant 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \tag{28}$$

Также будем говорить, что в этом случае портфель ξ менее рискован (не хуже) в смысле диверсификации, чем портфель η.

Основная идея этого определения взята из теоремы 1.11: выпуклая линейная комбинация портфелей, эквивалентных η (то есть распределённых так же, как и η) не хуже, чем сам портфель η.

Заметим, что в предложенном определении компоненты случайного вектора $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ не обязаны быть независимыми. Также следует отметить, что случаный вектор $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ не обязательно определён на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вполне возможна такая ситуация, в которой это вероятностное пространство окажется достаточно «бедным». Здесь важна не возможность построения такого случайного вектора на заданном вероятностном пространстве, но стохастическая связь между компонентами этого вектора.

Нетрудно видеть, что отношение $\overset{div}{\succcurlyeq}$ является *инвариантным по распределению*, то есть если $\xi_1 \overset{\mathrm{d}}{=} \xi$, $\eta_1 \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$ и $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то $\xi_1 \overset{div}{\succcurlyeq} \eta_1$. Таким образом, в предложенном сравнении не играет никакой роли характер стохастической связи между сравниваемыми случайными величинами, важны лишь их маргинальные распределения. Иначе говоря, отношение $\overset{div}{\succcurlyeq}$ сравнивает не случайные величины ξ и η, а их распределения P_ξ и P_η. То есть его можно рассматривать как бинарное отношение на множестве $\mathcal{P}$ всех вероятностных мер на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская сигма-алгебра на действительной прямой $\mathbb{R}$.

2.2 Некоторые свойства

Утверждение 2.13. *Если $\xi, \eta \in L^2$ и $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$ и $\mathsf{D}\xi \leqslant \mathsf{D}\eta$.*

Доказательство. Пусть $\xi, \eta \in L^2$, $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то есть существует многомерное распределение $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ и $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, т.ч. $a_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, $\eta_i \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$ и

$\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\eta_i$. Равенство математических ожиданий ξ и η очевидно, докажем неравенство для дисперсий:

$$\mathsf{D}(\xi) = \mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}(a_i\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \mathsf{D}(\eta_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \mathsf{D}(\eta) \leqslant \mathsf{D}(\eta).$$

□

Утверждение 2.14. *Пусть случайные величины ξ и η распределены нормально. Тогда $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$ в том и только в том случае, когда $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta$ и $\mathsf{D}\xi \leqslant \mathsf{D}\eta$.*

Доказательство. Необходимость очевидна в силу утверждения 2.2.
Докажем достаточность. Пусть $\mathsf{E}\xi = \mathsf{E}\eta = a$, $\sigma_1^2 = \mathsf{D}\xi \leqslant \mathsf{D}\eta = \sigma_2^2$. Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — н.о.р.с.в. ($n \in \mathbb{N}$), причём $\eta_i \overset{\mathrm{d}}{=} \eta$, т. е. $\eta_i \sim \mathscr{N}\left(a, \sigma_2^2\right)$. Рассмотрим случайные величины вида $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\eta_i$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. В этом случае ξ_n распределена нормально, $\mathsf{E}\xi_n = a$, $\mathsf{D}\xi_n = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\sigma_2^2$. Для произвольного фиксированного $n \in \mathbb{N}$ величина $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)$ при варьировании $a_1, \ldots, a_n$ (с учётом ограничений на неотрицательность и единичную сумму) может принимать произвольное значение из отрезка $[\frac{1}{n}, 1]$. Выбирая теперь такое n, чтобы $\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, построим вектор $(a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, такой, что $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$. В этом случае для $\xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\eta_i$ выполено $\mathsf{E}\xi_n = a$, $\mathsf{D}\xi_n = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\sigma_2^2 = \sigma_1^2$. Таким образом, $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\eta_i$, и тем самым показано, что $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$. Утверждение доказано. □

Утверждение 2.15. *Бинарное отношение $\overset{div}{\succcurlyeq}$ рефлексивно на L, то есть для произвольного $\xi \in L$ выполнено $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \xi$. Более того, это бинарное отношение рефлексивно и на $\mathcal{P}$, то есть если $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \xi_1$, то $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \xi_1$.*

Доказательство. Утверждение очевидно. □

Для доказательства транзитивности введённого отношения предпочтения потребуется

Лемма 2.16. *Пусть $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — два многомерных распределения, и $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} f(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, где f — $\mathcal{B}^m/\mathcal{B}$-измеримая функция. Тогда можно построить такое многомерное распределение $(\eta_1', \ldots, \eta_m', \xi_1', \ldots, \xi_n')$, что $(\eta_1', \ldots, \eta_m') \overset{\mathrm{d}}{=} (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ и*

$$(f(\eta_1', \ldots, \eta_m'), \xi_1', \ldots, \xi_n') \overset{\mathrm{d}}{=} (\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Доказательство. Многомерное распределение $(\eta'_1, \ldots, \eta'_m, \xi'_1, \ldots, \xi'_n)$ можно однозначно задать совместным распределением компонент $(\eta'_1, \ldots, \eta'_m)$ и условным распределением $(\xi'_1, \ldots, \xi'_n)$ при известных $(\eta'_1, \ldots, \eta'_m)$ (см., например, [5]). Возьмём

$$F_{\eta'_1,\ldots,\eta'_m}(y_1, \ldots, y_m) = F_{\eta_1,\ldots,\eta_m}(y_1, \ldots, y_m) \tag{29}$$

и

$$F_{\xi'_1,\ldots,\xi'_n|\eta'_1,\ldots,\eta'_m}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_n|\xi}(x_1, \ldots, x_n; f(y_1, \ldots, y_m)) \ . \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае

$$(f(\eta'_1, \ldots, \eta'_m), \xi'_1, \ldots, \xi'_n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{31}$$

□

Утверждение 2.17. *Отношение $\stackrel{div}{\succcurlyeq}$ транзитивно на L, то есть если $\xi, \eta, \zeta \in L$, то из отношения $\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} \eta \stackrel{div}{\succcurlyeq} \zeta$ следует, что $\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} \zeta$. Более того, это бинарное отношение транзитивно и на $\mathcal{P}$.*

Доказательство. Пусть $\xi, \eta, \zeta \in L$ и $\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} \eta \stackrel{div}{\succcurlyeq} \zeta$. По определению отношения диверсификации существуют два многомерных распределения: $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ и $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$ – такие, что

$$\eta_i \stackrel{\mathrm{d}}{=} \eta, \ i = \overline{1,n} \ , \qquad \zeta_j \stackrel{\mathrm{d}}{=} \zeta, \ j = \overline{1,m}$$

и

$$\xi \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i \ , \ \eta \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{j=1}^{m} b_j \zeta_j \ , \quad \text{где } a_i, b_j \geqslant 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j = 1.$$

Воспользовавшись n раз леммой 2.5, можно построить многомерное распределение

$$\{\zeta_{ij}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}\},$$

такое что:
1) $(\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \ldots, \zeta_{im}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m)$ для всех $i = 1, \ldots, n$,
2) $\left(\sum\limits_{j=1}^{m} b_j \zeta_{1j} \ , \ \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \zeta_{2j} \ , \ \ldots \ , \ \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \zeta_{nj} \right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.
Нетрудно видеть, что в этом случае

$$\xi \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j \zeta_{ij} \ .$$

Поскольку $a_i b_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j = 1$, то $\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} \zeta$, что и требовалось доказать.

Доказательство транзитивности бинарного отношения $\stackrel{div}{\succcurlyeq}$ на множестве $\mathcal{P}$ аналогично. □

Для доказательства того, что предложенное отношение предпочтения является частичной упорядоченностью, остаётся показать его антисимметричность. С ней всё немного сложнее, и приходится задействовать понятие меры риска.

Определение 2.18. Мерой риска называют отображение $\rho\colon L \to \mathbb{R}$.

Определение 2.19. Мера риска ρ называется инвариантной по распределению (*law-invariant*), если из того, что $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \xi'$, следует, что $\rho(\xi) = \rho(\xi')$.

Замечание. Инвариантные меры риска можно рассматривать как отображения из $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}$.

Определение 2.20. Мера риска ρ называется выпуклой, если для любых $\xi, \eta \in L$ выполнено

$$\rho\left(\lambda\xi + (1-\lambda)\,\eta\right) \leqslant \lambda\rho(\xi) + (1-\lambda)\rho(\eta) \qquad \forall\lambda \in [0,1]. \tag{32}$$

Лемма 2.21. *Если $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то для любой инвариантной по распределению выпуклой меры риска ρ выполняется $\rho(\xi) \leqslant \rho(\eta)$.*

Доказательство. Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — случайный вектор из определения отношения диверсификации $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то есть $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\eta_i$, где $a = (a_1, \ldots, a_n) \in [0,1]^n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$. Тогда, в силу инвариантности по распределению и выпуклости меры риска ρ,

$$\begin{aligned}
\rho(\xi) = \rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\eta_i\right) \leqslant a_1\,\rho(\eta_1) + (1-a_1)\,\rho\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{1-a_1}\eta_i\right) \leqslant \\
\leqslant a_1\,\rho(\eta_1) + (1-a_1)\frac{a_2}{1-a_1}\,\rho(\eta_2) + (1-a_1)\frac{1-a_1-a_2}{1-a_1}\,\rho\left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_i}{1-a_1-a_2}\eta_i\right) = \\
= a_1\,\rho(\eta_1) + a_2\,\rho(\eta_2) + (1-a_1-a_2)\,\rho\left(\sum_{i=3}^{n} \frac{a_i}{1-a_1-a_2}\eta_i\right) \leqslant \\
\leqslant \ldots \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i\rho(\eta_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\rho(\eta) = \rho(\eta).
\end{aligned} \tag{33}$$

□

Рассмотрим хорошо известное семейство мер риска под названием *Expected Shortfall*. Согласно [3], его можно определить как

$$\mathrm{ES}_\gamma(\xi) = -\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\gamma q_p(\xi)\,dp\ , \tag{34}$$

где

$$q_p(\xi) = \inf\left(\ \left\{x \in \mathbb{R} \mid F_\xi(x) \geqslant p\right\}\ \cup\ \{+\infty\}\ \right)\ ,\ p \in [0,1] \quad — \tag{35}$$

— нижняя квантильная функция распределения ξ. Аргумент $\gamma \in (0,1]$ называется уровнем Expected Shortfall'a.
Следует отметить, что $|\mathrm{ES}_\gamma(\xi)| < \infty$ при $\xi \in L^1$.
Для каждого допустимого уровня γ, ES_γ является инвариантной по распределению и выпуклой мерой риска. Более того, эта мера риска *когерентна* (см. [3]).

Следовательно, к ней применима лемма 2.10: если $\xi, \eta \in L^1$ и $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ для всех уровней $\gamma \in (0,1]$. Используем этот факт для доказательства следующего утверждения.

Утверждение 2.22. *Бинарное отношение* $\overset{div}{\succcurlyeq}$ *псевдоантисимметрично на* L^1, *то есть*

$$\mathsf{E}|\xi| < \infty\ ,\ \mathsf{E}|\eta| < \infty\ ,\ \xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta\ ,\ \eta \overset{div}{\succcurlyeq} \xi \quad \Longrightarrow \quad \xi \overset{\mathrm{d}}{=} \eta.$$

Иначе говоря, это бинарное отношение антисимметрично на $\mathcal{P}^1$ *— множестве вероятностных мер с конечными первыми абсолютными моментами на измеримом пространстве* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Доказательство. Заметим, что в силу $\mathsf{E}|\xi| < \infty$ и $\mathsf{E}|\eta| < \infty$, $\mathrm{ES}_\gamma(\xi)$ и $\mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ любого уровня γ конечны. Поскольку $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, то $\mathrm{ES}_\gamma(\xi) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\eta)$ для всех $\gamma \in (0,1]$. Точно так же, поскольку $\eta \overset{div}{\succcurlyeq} \xi$, то $\mathrm{ES}_\gamma(\eta) \leqslant \mathrm{ES}_\gamma(\xi)$ для всех $\gamma \in (0,1]$. Таким образом,

$$\mathrm{ES}_\gamma(\xi) = \mathrm{ES}_\gamma(\eta) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in (0,1]. \tag{36}$$

Пользуясь представлением (34), перепишем это в виде

$$\int_0^\gamma q_p(\xi)\,dp = \int_0^\gamma q_p(\eta)\,dp \quad \text{для всех} \quad \gamma \in (0,1]. \tag{37}$$

Поскольку нижняя квантильная функция любого распределения $q_p(\xi)$ неубывающая и непрерывная слева по аргументу $p \in [0,1]$ (см., напр. [4, раздел 4.1.3]), то из последнего равенства следует, что

$$q_p(\xi) = q_p(\eta) \quad \text{для всех} \quad p \in [0,1]. \tag{38}$$

В свою очередь, равенство квантилей всех уровней означает, что распределения случайных величин ξ и η совпадают. Утверждение доказано. □

Следствием последнего утверждения, а также утверждений 2.4 и 2.5, является:

Теорема 2.23. *Бинарное отношение* $\overset{div}{\succcurlyeq}$ *является псевдочастичной упорядоченностью на* L^1 *и частичной упорядоченностью на* $\mathcal{P}^1$.

Утверждение 2.24. *Если* $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, *то* $c\xi \overset{div}{\succcurlyeq} c\eta$ *для всех* $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $\xi \overset{div}{\succcurlyeq} \eta$, и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — многомерное распределение из определения отношения диверсификации, т.е. $\xi \overset{\mathrm{d}}{=} \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \eta_i$, где $\alpha =$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Тогда $c\xi \stackrel{\mathrm{d}}{=} c\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (c\eta_i)$. Поскольку $c\eta \stackrel{\mathrm{d}}{=} c\eta_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$, то построено многомерное распределение $(c\eta_1, \ldots, c\eta_n)$, удовлетворяющее определению $c\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} c\eta$, ч.т.д. □

Замечание. Стоит отметить, что инвестиционный портфель $c\xi$ здесь не следует рассматривать как вложение в c раз большего капитала в те активы, которые составляют портфель ξ. В начале раздела было принято, что имеется возможность инвестировать *фиксированный* капитал S. Под $c\xi$ следует понимать такое распределение капитала S, стоимость которого в момент T превышает стоимость портфеля ξ в c раз. Вполне возможно, что на рынке не будет возможности составить такой портфель, но нас не должен смущать этот факт. Нас интересует лишь возможность сравения двух вероятностных распределений.

Утверждение 2.25. *Пусть (ξ, X) — совместное распределение двух независимых с.в. Пусть, аналогично, (η, X') — совместное распределение двух независимых с.в., причём $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'$. Тогда если $\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} \eta$, то $\xi + X \stackrel{div}{\succcurlyeq} \eta + X'$.*

Доказательство. Пусть $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — многомерное распределение, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n$ — веса из определения $\xi \stackrel{div}{\succcurlyeq} \eta$, и $\xi \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i$. Расширим многомерное распределение $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ до $(\eta_1, \ldots, \eta_n, X'')$, где $X'' \stackrel{\mathrm{d}}{=} X$ и X'' стохастически не зависит от $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Тогда $\xi + X \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \eta_i + X'' = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (\eta_i + X'')$.

Поскольку η_i и X'' независимы и $X'' \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'$, то $\eta_i + X'' \stackrel{\mathrm{d}}{=} \eta + X'$. Таким образом, построено многомерное распределение $(\eta_1 + X'', \ldots, \eta_n + X'')$, маргинальные распределения которого совпадают с распределением $\eta + X'$ и выпуклая линейная комбинация элементов которого совпадает по распределению с $\xi + X$, т.е. $\xi + X \stackrel{div}{\succcurlyeq} \eta + X'$. Утверждение доказано. □

Замечание. Здесь не следует рассматривать X (и X') как портфель в определённом в начале раздела понимании. Важно, чтобы $\xi + X$ (и $\eta + X'$) оставался портфелем. В этом смысле можно рассматривать X как независимую добавку к портфелю ξ, стоимость которой в нулевой момент времени равна нулю (например, покупка одного актива и короткая продажа другого).

Список литературы

[1] Яковенко Д. О., Целищев М. А. Диверсификация и её связь с мерами риска // Информатика и её применения, 2011. Т.5. Вып.3. С.21—26.

[2] Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. NY: John Wiley & Sons, 1959.

[3] Acerbi C., Tasche D. On the Coherence of Expected Shortfall // J. Banking Finance, 2002. Vol.26. No.7. P.1487—1503.

[4] Springer Handbook of Engineering Statistics. ed. Pham H. 2006.

[5] Лоэв М. Теория вероятностей. Москва, 1962.